27/11/18

<u>Ορισμός</u>: Η $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $\bar{x} \in U$ ονομάζεται <u>συνεχώς (μερικώς) διαφορίσιμη στο $\bar{x}$</u>, αν υπάρχει ένα $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$, έτσι ώστε η $f|_{B(\bar{x},\varepsilon)}$ να είναι συνεχώς (μερικώς) διαφορίσιμη, δηλ.:

$\forall \bar{x} \in B(\bar{x}, \varepsilon)$ $\exists$ $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$, $\forall i = 1, \dots, n$ και οι συναρτήσεις

$\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : B(\bar{x}, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς

<u>Λύση Θέματος</u>: Έχουμε μια συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Πρέπει να εξετάσουμε σε κάθε σημείο $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ αν η συνάρτηση είναι συνεχώς, μερικώς διαφορίσιμη, συνεχώς (μερικώς) διαφορ.

$\longrightarrow$

① Για όλα τα σημεία $(x,y) \neq (0,0)$ δηλαδή $(x,y) \in \underbrace{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}_{U}$ [Το $U \subset \mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό, αφού $\forall \bar{x} \in U$, $\exists B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$ όπου $\varepsilon > 0$]

Ισχύουν τα εξής: η f είναι συνεχής (ως ρητή), μερικώς διαφορίσιμη, αφού $\exists$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} + xy(-1)\frac{1}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2x =$

$$= \frac{y \cdot (x^2+y^2) - 2x^2 y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y \cdot (y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$ και:

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ και συνεχώς μερικώς διαφορ. αφού οι $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς.

<u>Παρατήρηση</u>: Εδώ χρησιμοποιήσαμε ότι το $U: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ είναι ανοικτό ως εξής: περιορίζοντας την $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ στο $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ έχουμε τη συνάρτηση $f|_U(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ $\forall (x,y) \in U$

Επειδή μας ενδιαφέρει κάθε φορά τι συμβαίνει "γύρω" από ένα τυχαίο σημείο $(x_0, y_0) \in U$ λόγω του ότι το U είναι ανοικτό, μπορούμε γύρω από κάθε τέτοιο σημείο να βρούμε $B((x_0,y_0), \varepsilon) \subset U$. Είμαστε μακριά από την περιοχή $(x,y) = (0,0)$ όπου η συνάρτηση αλλάζει τύπο. Συνεπώς, συζητάμε ουσιαστικά για τη συνάρτηση: $f|_U(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, το οποίο είναι πολύ εύκολο.

Στο σημείο $(0,0) = (x_0, y_0)$ η: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

<u>Δεν</u> είναι συνεχής, αφού: $f\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) \xrightarrow[\nu \to \infty]{} \frac{1}{2}$

$\to$

Ως προς τη μερική διαφορισιμότητα:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 = \dots =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$ αλλά έχει και τις δύο μερικές παραγώγους, δηλ. είναι μερικώς διαφορ. στο $(0,0)$

<u>Άσκηση</u> Εξετάστε την ① $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 \cdots x_n}{\|\bar{x}\|^n} & , \bar{x} \neq \bar{0} \quad n\in\mathbb{N}, n\geq 2 \\ 0 & , \bar{x} = \bar{0} \end{cases}$

② $f(\bar{x}) = \|\bar{x}\|, \ \bar{x}\in\mathbb{R}^n$

<u>Ορισμός</u> Έστω $\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό $(n \geq 2)$

Η $\bar{f}$ λέγεται ① μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ως προς την i-μεταβλητή, $i = 1, \dots, n$

② μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{x}$

③ μερικώς διαφορίσιμη

④ συνεχώς (μερικώς) $\shortparallel$ - , αν αντίστοιχα, τα ① έως ④ ισχύουν για κάθε συνιστώσα της f_j, $j = 1, \dots, m$

Ο πίνακας των μερικών παραγώγων της $\bar{f}$ στο $\bar{x}$

$$J_{\bar{f}}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

$\to$

$J\bar{f}(\bar{x})$: ονομάζεται Ιακωβιανός (Jacobian) πίνακας της $\bar{f}$ στο $\bar{x}$

Ισχύει: $J\bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \underbrace{\operatorname{grad} f_1(\bar{x})}_{\in \mathbb{R}^{1\times n}} \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(\bar{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $\left(\begin{matrix} \bar{f} = f \\ m = 1 \end{matrix} \Rightarrow Jf(\bar{x}) = \operatorname{grad} f(\bar{x}) \right)$

<u>Άλγεβρα Ιακωβιανών πινάκων</u>

Έστω $\bar{f}, \bar{g} : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $\bar{x} \in U$ μερικώς διαφ. στο $\bar{x}$. Τότε:

$$J_{\bar{f}+\bar{g}}(\bar{x}) = J\bar{f}(\bar{x}) + J\bar{g}(\bar{x}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial (f_1+g_1)(\bar{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial (f_1+g_1)(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial (f_m+g_m)(\bar{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial (f_m+g_m)(\bar{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{x_1} & \cdots \\ \vdots & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \cdots \\ \vdots & \end{pmatrix}$$

(Διότι ισχύει $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$. Η μερ. διαφ. είναι σαν παραγώγιση ως προς μια μεταβλητή)

Επίσης, $\nabla(\bar{f}\cdot\bar{g})(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x})^T J\bar{g}(\bar{x}) + \bar{g}(\bar{x})^T J\bar{f}(\bar{x})$

όπου πάντα (κατά βάση) θεωρούμε διανυσματική συνάρτηση ως διανύσματα στήλες, δηλ

$$\bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}) \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{f}(\bar{x})^T = (f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x}))$$

$$(\bar{f}\cdot\bar{g})(\bar{x}) = \underbrace{\bar{f}(\bar{x})}_{\in\mathbb{R}^n} \cdot \underbrace{\bar{g}(\bar{x})}_{\in\mathbb{R}^n} \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{f}\cdot\bar{g} : U \to \mathbb{R} \Rightarrow \nabla(\underbrace{\bar{f}\cdot\bar{g}}_{=\sum_{j=1}^{m} f_j(\bar{x}) g_j(\bar{x})})(\bar{x}) =$$

$$= \left(\frac{\partial(\bar{f}\cdot\bar{g})(\bar{x})}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial(\bar{f}\cdot\bar{g})(\bar{x})}{\partial x_n} \right) \in \mathbb{R}^n$$

$\Rightarrow$

όπου $\frac{\partial(\bar f\cdot\bar g)}{\partial x_i}(\bar x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{m} f_j(\bar x)\, g_j(\bar x) = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\big(f_j(\bar x)\, g_j(\bar x)\big) =$

$= f_j(\bar x)\,\frac{\partial g_j(\bar x)}{\partial x_i} + g_j(\bar x)\,\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar x)$ $\quad = \big(F_1(\bar x), \dots F_m(\bar x)\big)\cdot$

$$\bullet \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(\bar x)}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_m(\bar x)}{\partial x_i} \end{pmatrix}$$

<u>Ορισμός</u>: Η $\bar f: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, ανοιχτό, λέγεται διαφορίσιμη στο $\bar x$, αν $\exists$ γραμμική απεικόνιση $D: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (δηλ. $\exists\, D \in \mathbb{R}^{m\times n}$) έτσι ώστε:

$$\boxed{\lim_{\bar u\to\bar 0} \frac{\bar f(\bar x+\bar u) - \bar f(\bar x) - D\bar u}{\|\bar u\|} = 0} \quad (*)$$

<u>Παρατήρηση</u>: Θα δούμε ότι ένα τέτοιο $D\in\mathbb{R}^{m\times n}$ είναι μοναδικό, ότι όταν η $\bar f$ είναι διαφ. στο $\bar x$ είναι και μερικώς διαφ. στο $\bar x$ (δηλ. $\exists\, J\bar f(\bar x)\in\mathbb{R}^{m\times n}$) και ότι $D = J\bar f(\bar x)$

[Επίσης, θα δούμε ότι $\bar f$ διαφ. στο $\bar x \Rightarrow \bar f$ συνεχής στο $\bar x$]

Τέλος το $D = J\bar f(\bar x)$ $\boxed{\text{ΑΝ Η } \bar f \text{ ΕΙΝΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΗ } \bar x.}$ ~~[illegible]~~ ονομάζεται παράγωγος της $\bar f$ στο $\bar x$ και συμβολίζεται με $D\bar f(\bar x)$ [$= J\bar f(\bar x) = D$ - ΠΡΟΣΟΧΗ! - ΜΕ ΤΗΝ ΙΔΙΟΤΗΤΑ (*)]

• Επίσης, η παράγωγος της $\bar f$ στο $\bar x$ ονομάζεται <u>διαφορικό της $\bar f$ στο $\bar x$</u>

• Η $\bar f$ (όπως ορίσαμε πιο πάνω) λέγεται διαφορίσιμη αν είναι διαφ. σε κάθε $\bar x \in U$ και τότε $\exists\ \bar x \mapsto D\bar f(\bar x) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ δηλ: $D\bar f: U \to \mathbb{R}^{m\times n}$, η οποία ονομάζεται <u>παράγωγος της $\bar f$</u> ή <u>διαφορικό της $\bar f$</u>

Το (*) είναι ισοδύναμο με:

$$\lim_{\bar{y}\to\bar{x}} \frac{\bar{f}(\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x}) - D(\bar{y}-\bar{x})}{\|\bar{y}-\bar{x}\|} = \bar{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \frac{\|\bar{f}(\bar{x}+\bar{h}) - \bar{f}(\bar{x}) - D\bar{h}\|}{\|h\|} = 0$$

Ειδική περίπτωση $m=1$: Η $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, ανοιχτό, λέγεται διαφορίσιμη στο $\bar{x}$, αν $\exists$ $\bar{d} = (d_1, .., d_n) \in \mathbb{R}^{1\times n}$ έτσι ώστε:

$$\lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \frac{f(\bar{x}+\bar{h}) - f(\bar{x}) - \bar{d}\cdot\bar{h}}{\|\bar{h}\|} = 0$$

Ειδική περίπτωση $m=n=1$: Η $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}$, ανοιχτό, λέγεται διαφορίσιμη στο $x \in U$ αν $\exists$ $d \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - d\cdot h}{|h|} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - d\cdot h|}{|h|} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - d\cdot h}{h} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} +$$

$$+ \lim_{h\to 0} \frac{-dh}{h} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = d$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-dh}{h} = -d$$

$$d = f'(x)$$